模块三 三角函数的图象性质

第 1 节 求三角函数解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（★★★）

内容提要

求三角函数解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的常见题型有恒等变换化简、根据图象求解析式等.

1．恒等变换化简得到 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$：一般分“拆”、“降”、“合”三步.

①拆：若解析式中有 $\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 这类结构，通常先拆开；

②降：遇到 $\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\sin x\cos x$ 这些结构，可降次；（“拆”和“降”的顺序要视情况而定）

③合：完成前两步后，通常就化为了 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x+B$ 这类结构，最后可利用辅助角公式合并.

2．根据图象求解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$：

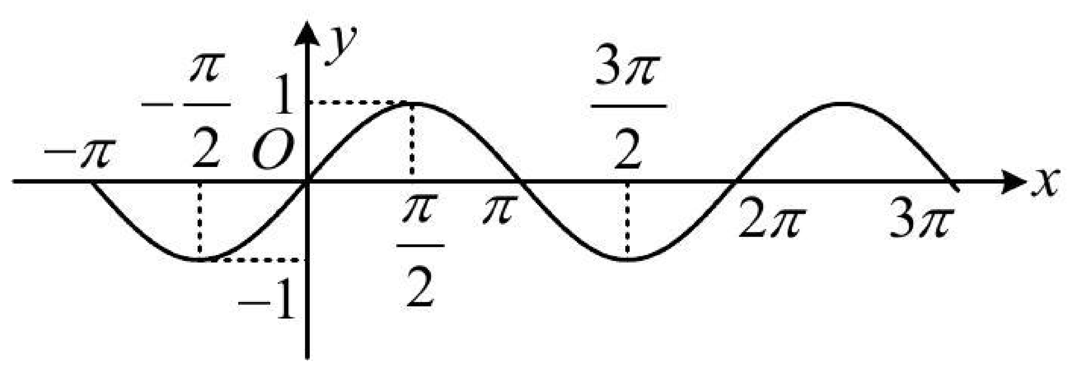
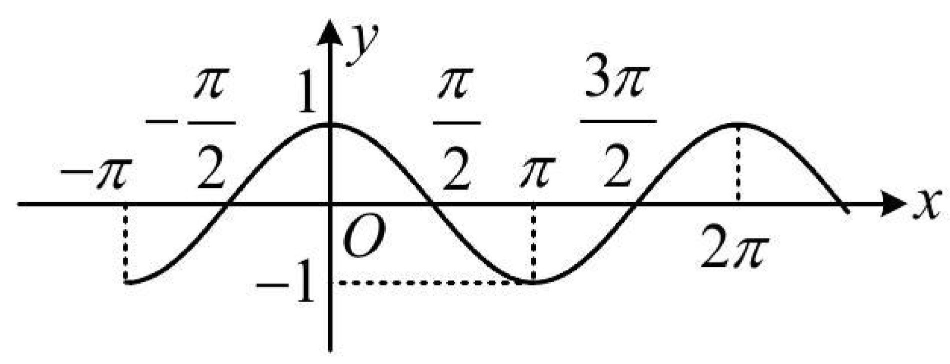
①用最大值和最小值求 A：$\begin{cases} f(x)_{\max}=|A|+B \\ f(x)_{\min}=-|A|+B \end{cases} \Rightarrow |A|=\dfrac{f(x)_{\max}-f(x)_{\min}}{2}$；

②用最大值和最小值求 B：$\begin{cases} f(x)_{\max}=|A|+B \\ f(x)_{\min}=-|A|+B \end{cases} \Rightarrow B=\dfrac{f(x)_{\max}+f(x)_{\min}}{2}$；

③用最小正周期 T 求 ω：$|\omega|=\dfrac{2\pi}{T}$；

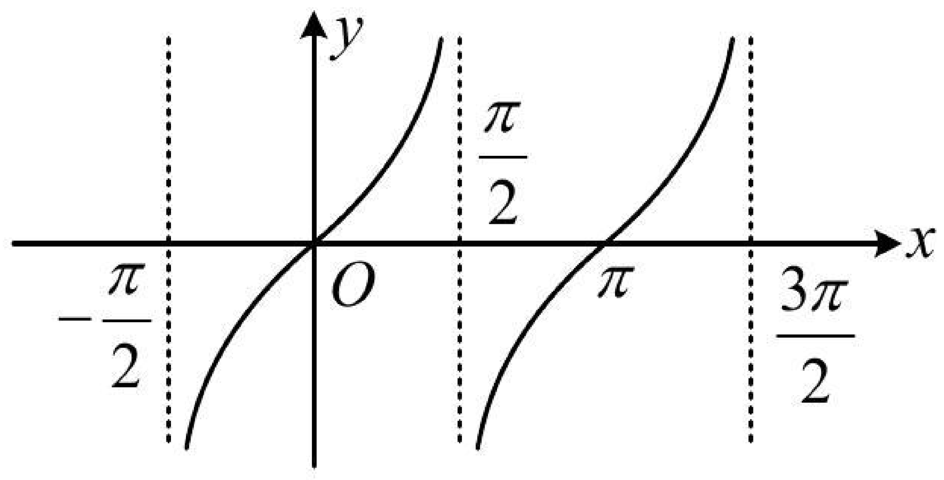
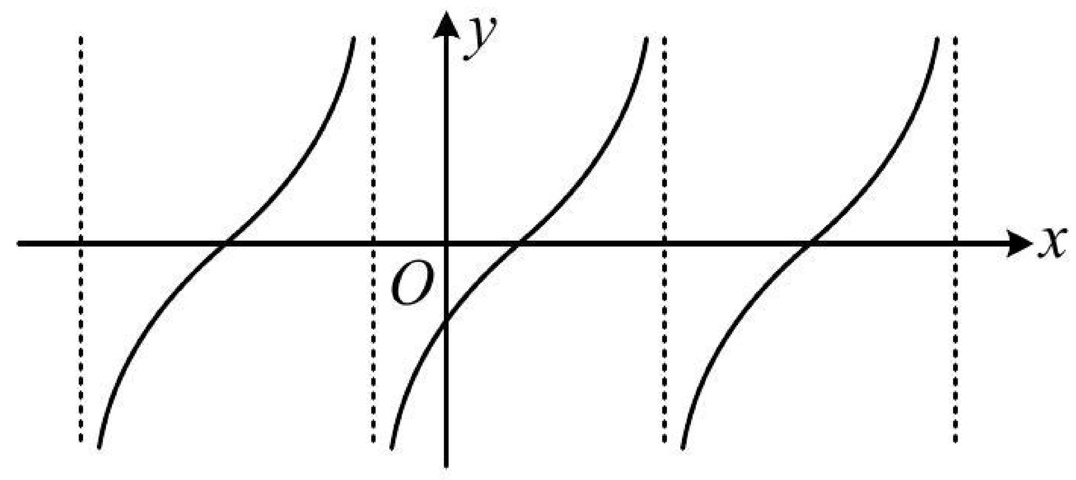
④最值点求 φ：将函数图象上的最大值或最小值点代入解析式，求出 φ. 若图象上没有标出最值点，也无法通过简单的推理得出最值点，则考虑代图象上的其它已知点求 φ. 之所以首选最值点，是因为一个周期内，只有最大值或最小值点是唯一的，若代其它点，可能会有增根需要舍去.

3． $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象及性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
周期性	最小正周期为 2π	最小正周期为 2π
奇偶性	奇函数	偶函数
单调性	单调递增区间：$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$ 单调递减区间：$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$	单调递增区间：$[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 单调递减区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$
最值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$ 当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$	当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$ 当 $x=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$

对称中心	$(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$

4． $y=\tan x$ 的图象及性质

函数	$y=\tan x$	$y=A\tan(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$
图象		
定义域	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x\mid \omega x+\varphi\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
最小正周期	π	$\frac{\pi}{\omega}$
奇偶性	奇函数	当 $\varphi=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时为奇函数，否则为非奇非偶函数
增区间	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{1}{\omega}(k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi),\frac{1}{\omega}(k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi))(k\in\mathbf{Z})$
对称中心	$(\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{1}{\omega}(\frac{k\pi}{2}-\varphi),0)(k\in\mathbf{Z})$

5．设 $A>0$， $\omega>0$，则函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的性质如下表：

函数	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	$y=A\cos(\omega x+\varphi)$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-A,A]$	$[-A,A]$
周期性	最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$	最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$
单调性	增区间： $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 减区间： $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	增区间： $2k\pi-\pi\le\omega x+\varphi\le 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 减区间： $2k\pi\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$
最值	当 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时， $y_{\max}=A$ 当 $\omega x+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时， $y_{\min}=-A$	当 $\omega x+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时， $y_{\max}=A$ 当 $\omega x+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时， $y_{\min}=-A$
对称轴	$\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$
对称中心	$(\frac{1}{\omega}(k\pi-\varphi),0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{1}{\omega}(k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi),0)(k\in\mathbf{Z})$

典型例题

类型Ⅰ：化简求解析式

【例 1】已知函数 $f(x)=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____，值域为_____.

解析：要求周期和值域，得把解析式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 这种形式，先拆 $\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 这部分，

由题意， $f(x)=\sin x(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x$，

再对 $\sin x\cos x$ 和 $\sin^2 x$ 降次，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}$，

最后用辅助角公式合并，故 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

最小值为 $-\frac{3}{4}$，最大值为 $\frac{1}{4}$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$.

答案： π，$[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$

【反思】 化简三角函数解析式的步骤：①拆：例如本题遇到 $\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 这种结构，将其拆开；②降：用降次公式对 $\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\sin x\cos x$ 这类项降次；③合：用辅助角公式合并.

【变式】（2019·浙江卷节选）设函数 $f(x)=\sin x(x\in\mathbf{R})$，求函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域.

解： 由题意，$y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2=\sin^2(x+\frac{\pi}{12})+\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$，

（要求该函数的值域，应将其化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的形式，先用降次公式降次）

$$y=\sin^2(x+\frac{\pi}{12})+\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{2}+\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{2}+\frac{1+\sin 2x}{2},$$

（接下来拆 $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ 这部分，随后再用辅助角公式合并）

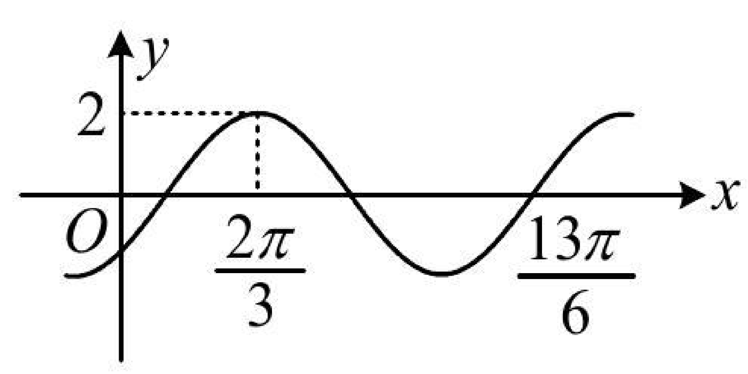
$$y=1-\frac{1}{2}(\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\sin 2x=1+\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6}),$$

因为 $-1\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$，所以函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域是 $[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

【反思】 若解析式中有像 $\sin^2(x+\frac{\pi}{12})$ 这类平方项，应先降次，而不是先拆角，再平方展开，降次，合并.

类型Ⅱ：由部分图象求解析式

【例 2】如图是 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象，则 $f(x)=$______.



解析： 从图象可以看出 $f(x)$ 的最大值，可由此求出 A，由图可知 $A=2$；

图象上 $\frac{2\pi}{3}$ 到 $\frac{13\pi}{6}$ 这一段是 $\frac{3}{4}$ 个周期，所以周期可求，那么 ω 也就有了，

$\frac{13\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{4}T$，所以 $T=2\pi$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$；

最后代点求 φ，首选最值点，此处本身就给出 $\frac{2\pi}{3}$ 这个最大值点，就代它，

由图可知，$f(\frac{2\pi}{3})=2\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=2\Rightarrow\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=1\Rightarrow\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

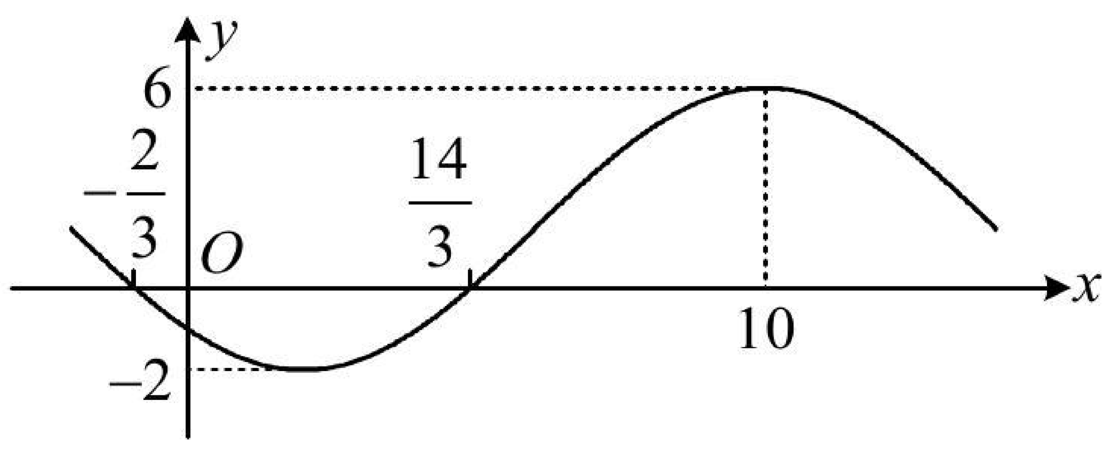
又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 k 只能取 0，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$.

答案：$2\sin(x-\frac{\pi}{6})$

【变式 1】已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则（　　）

（A）$f(x)=-4\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})+2$　　（B）$f(x)=4\sin(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4})+2$

（C）$f(x)=-4\sin(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4})+2$　　（D）$f(x)=4\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})+2$



解法 1：图上只有一个最大值点，求周期还不够，观察发现可由 x 轴上的两个点推断出最小值点，

由图可知，$x=-\frac{2}{3}$ 和 $x=\frac{14}{3}$ 的中间 $x=2$ 必为最小值点，所以 $\frac{T}{2}=10-2=8$，

从而 $T=16$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{8}$，所以 $f(x)=A\sin(\frac{\pi}{8}x+\varphi)+B$，

从图象可以看出最大、最小值分别为 6 和 -2，可由此求 A 和 B，但由于没给 A 的正负，故需讨论，

①当 $A>0$ 时，由图可知，$\begin{cases}A+B=6\\-A+B=-2\end{cases}$，解得：$A=4$，$B=2$，所以 $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{8}x+\varphi)+2$，

最后求 φ，首选最值点，代最小值点 $x=2$ 或最大值点 $x=10$ 均可，不妨代 $x=2$，

故 $f(2)=4\sin(\frac{\pi}{8}\times2+\varphi)+2=-2$，所以 $\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=-1$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，从而 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\varphi<\frac{3\pi}{4}$，故 $\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=-1$ 无解；

②当 $A<0$ 时，由图可知，$\begin{cases}-A+B=6\\A+B=-2\end{cases}$，解得：$A=-4$，$B=2$，所以 $f(x)=-4\sin(\frac{\pi}{8}x+\varphi)+2$，

接下来再求 φ，还是代最小值点 $x=2$，$f(2)=-4\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)+2=-2\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=1$，

结合 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\varphi<\frac{3\pi}{4}$ 可得 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，故 $f(x)=-4\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})+2$.

解法 2：这种给出部分图象，选解析式的题，有时也可结合图象的一些特征，用排除法来选答案，

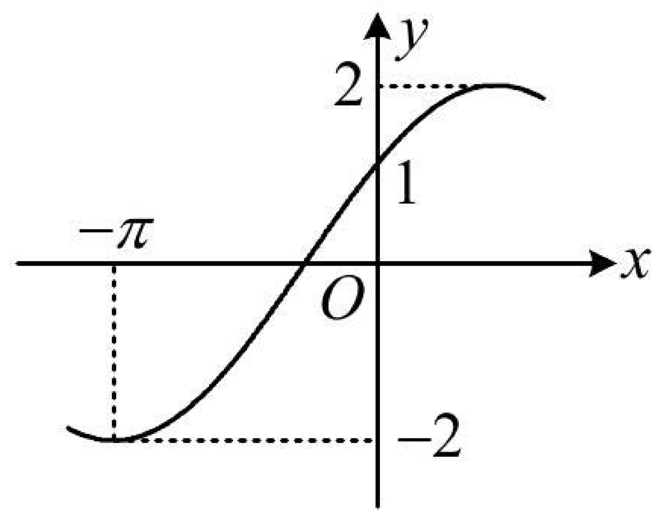
由图可知，$f(-\frac{2}{3})=0$，经检验，选项 B、C 不满足；

又 $f(10)=6$，对于选项 D，$f(10)=4\sin(\frac{\pi}{8}\times10+\frac{\pi}{4})+2=4\sin\frac{3\pi}{2}+2=-2\neq6$，与图象不符，故选 A.

答案：A

【反思】①不确定 A 的正负时，可讨论；②选择题抓住图中关键信息，用排除法选答案也是好方法.

【变式 2】下图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象，则 $f(\dfrac{3\pi}{4})=$______.



解析：图中标注了最大、最小值，可由此求 A，由图可知，$f(x)_{\max}=2$，结合 $A>0$ 可得 $A=2$，

接下来一般的想法是由图上的关键点（最值点、零点）求周期，但本题的关键点只有一个最小值点，也无法推断其它关键点，求不出周期，故尝试把图中标出的 $(-\pi,-2)$ 和 $(0,1)$ 这两个点代进解析式，

由图可知，$\begin{cases}f(-\pi)=2\sin(-\omega\pi+\varphi)=-2 & ①\\ f(0)=2\sin\varphi=1 & ②\end{cases}$，我们发现式②是关于 φ 的单变量方程，可先求出 φ，

由②可得 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，结合 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，代入①化简得：$\sin(-\omega\pi+\dfrac{\pi}{6})=-1$，

所以 $-\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，故 $\omega=\dfrac{2}{3}-2k(k\in\mathbf{Z})$，

要求 ω，还需筛选 k，怎么办呢？由图虽无法看出周期，但能看出周期的范围，进而得到 ω 的范围，

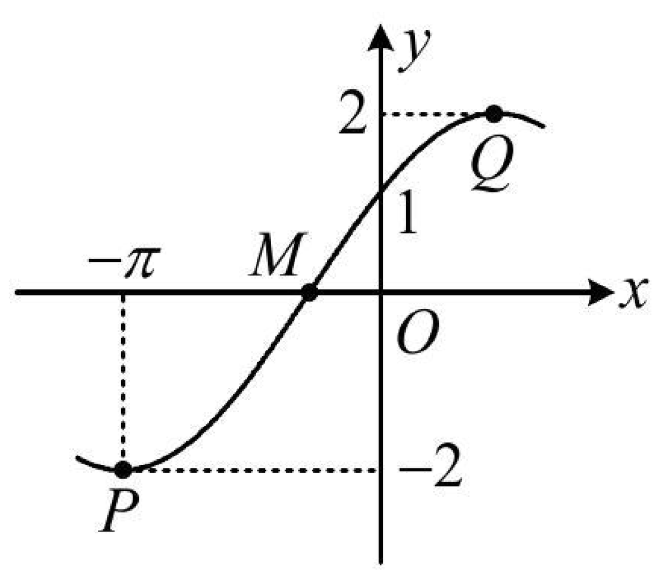
如图，P，M 两点的横向距离是 $\dfrac{T}{4}$，此距离小于点 P 到 y 轴的距离 π，所以 $\dfrac{T}{4}<\pi$，故 $T<4\pi$，

又 P，Q 两点的横向距离为 $\dfrac{T}{2}$，此距离大于点 P 到 y 轴的距离，所以 $\dfrac{T}{2}>\pi$，故 $T>2\pi$，

所以 $2\pi<T<4\pi$，从而 $2\pi<\dfrac{2\pi}{\omega}<4\pi$，故 $\dfrac{1}{2}<\omega<1$，结合 $\omega=\dfrac{2}{3}-2k$ 可得 k 只能取 0，此时 $\omega=\dfrac{2}{3}$，

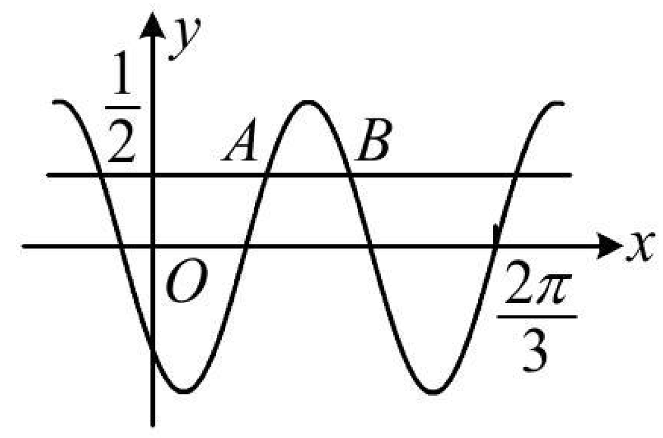
所以 $f(x)=2\sin(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{6})$，故 $f(\dfrac{3\pi}{4})=2\sin(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})=2\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$



【反思】当无法从图上直接观察或推断出周期时，可以考虑利用最值点、零点这些关键点的横向距离构造不等式限定周期的范围，从而得出 ω 的范围.

【例 3】（2023 • 新高考 II 卷）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图，$A$，$B$ 是直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点，若 $|AB|=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f(\pi)=$______.



解析：$|AB|=\frac{\pi}{6}$这个条件怎么翻译？可用 $y=\frac{1}{2}$ 求 A，B 横坐标的通解，得到$|AB|$，从而建立方程求 ω，

不妨设 $\omega>0$，令 $\sin(\omega x+\varphi)=\frac{1}{2}$ 可得 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，

由图知 $\omega x_A+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$\omega x_B+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，两式作差得：$\omega(x_B-x_A)=\frac{2\pi}{3}$，故 $x_B-x_A=\frac{2\pi}{3\omega}$，

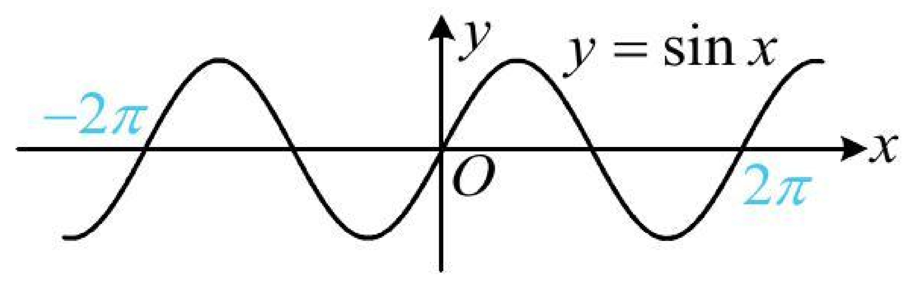
又 $|AB|=x_B-x_A=\frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{6}$，解得：$\omega=4$，故 $f(x)=\sin(4x+\varphi)$，

再求 φ，由图知 $\frac{2\pi}{3}$ 是零点，可代入解析式，注意，$\frac{2\pi}{3}$ 是增区间上的零点，$y=\sin x$ 的增区间上的零点是 $2n\pi$（如下图中的 -2π，0，2π），故应按它来求 φ 的通解，

所以 $\frac{8\pi}{3}+\varphi=2n\pi(n\in\mathbf{Z})$，从而 $\varphi=2n\pi-\frac{8\pi}{3}$，故 $f(x)=\sin(4x+2n\pi-\frac{8\pi}{3})=\sin(4x-\frac{2\pi}{3})$，

所以 $f(\pi)=\sin(4\pi-\frac{2\pi}{3})=\sin(-\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



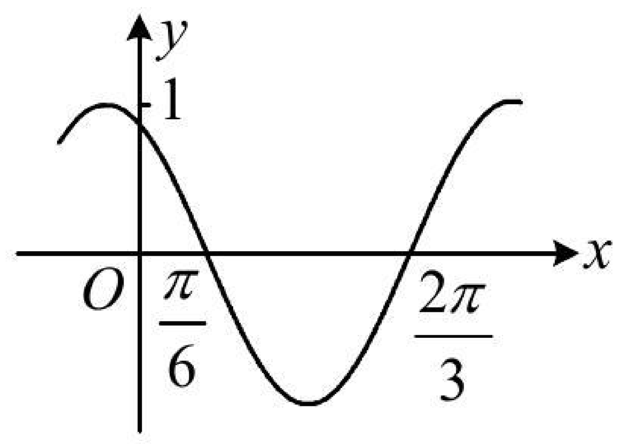
【反思】对于函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，若只能用零点来求解析式，则需尽量确定零点是在增区间还是减区间. “增区间的零点”用 $\omega x+\varphi=2n\pi$ 来求，“减区间的零点”用 $\omega x+\varphi=2n\pi+\pi$ 来求.

强化训练

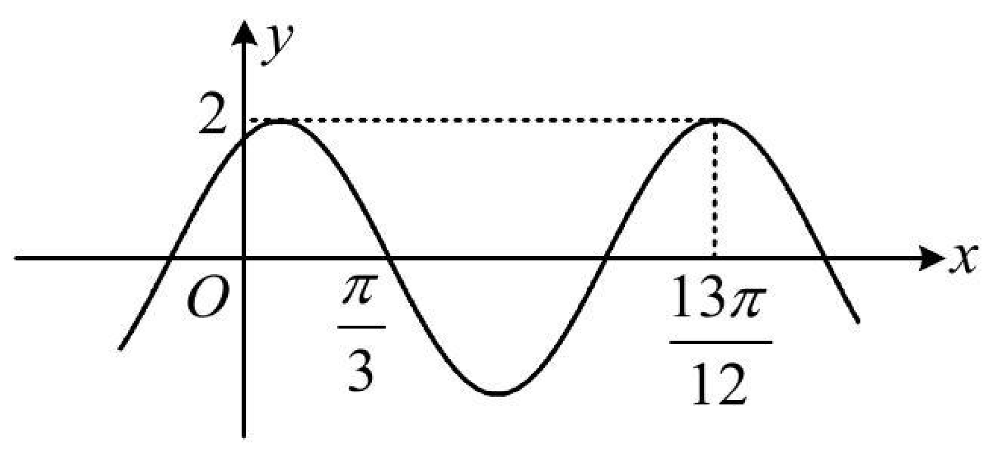
1.（★★）设 $f(x)=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})\sin 2x$，则函数 $y=f(x)$ 的值域为_____.

2.（★★）已知函数 $f(x)=\sin^2(x+\frac{\pi}{3})+\cos^2 x(x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____，值域为_____.

3.（2023・重庆模拟改・★★）如图是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<2\pi)$ 的部分图象，则 $f(x)=$_____.



4．（2021·全国甲卷·★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{\pi}{2})=$______.

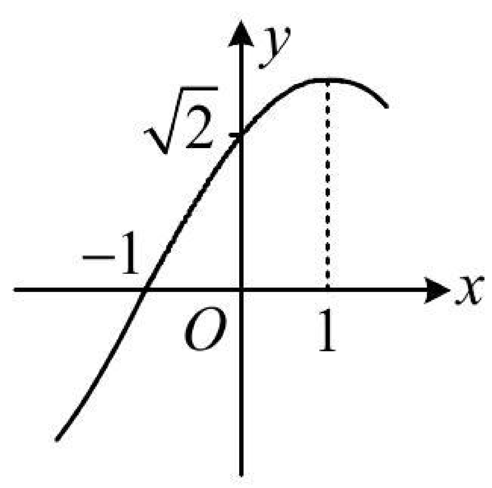


5．（2023·全国乙卷·★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ 单调递增，直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的两条对称轴，则 $f(-\frac{5\pi}{12})=$（　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$-\frac{1}{2}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

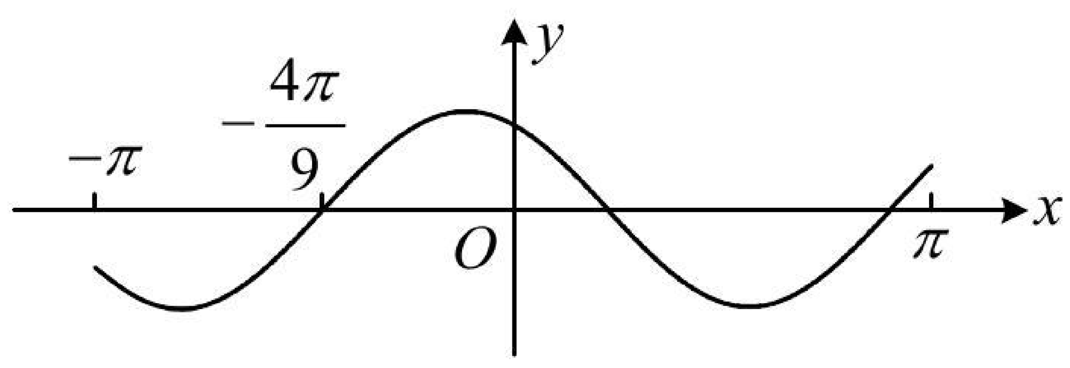
6．（2023·海南模拟·★★★）函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{7}{3})=$（　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（D）1



7.（2020 • 新课标Ⅰ卷 • ★★★）设 $f(x)=\cos(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（　　）

（A）$\dfrac{10\pi}{9}$　　（B）$\dfrac{7\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{4\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{3\pi}{2}$



8.（2023 • 山东潍坊二模 • ★★★★）（多选）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图象如图所示，则（　　）

（A）$f(x)\le f(\dfrac{11\pi}{6})$

（B）函数 $f(x+\dfrac{\pi}{6})$ 为偶函数

（C）$f(x)+f(\dfrac{\pi}{6}-x)=2$

（D）曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 处的切线斜率为 -2